

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Математичний аналіз 1

Диференціальне числення функцій дійсної змінної

ЗБІРНИК ЗАДАЧ ДЛЯ РОЗРАХУНКОВИХ РОБІТ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю
124 «Системний аналіз»,*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2020

Математичний аналіз 1 Диференціальне числення функцій дійсної змінної: Збірник задач для розрахункових робіт [Електронний ресурс] : навчальний. посібник для студентів спеціальності 124 «Системний аналіз»/ КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: Ю.В.Богданський, В.Г.Бондаренко, А.Ю.Мальцев, Г.Б.Подколзін.– Електронні текстові дані (1 файл: 3,32 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 59 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол №6 від 31 січня 2020р.) за поданням Вченої ради ІПСА (протокол №1 від 27 січня 2020 р.)

Електронне мережне навчальне видання

Математичний аналіз 1
Диференціальне числення функцій дійсної змінної
ЗБІРНИК ЗАДАЧ ДЛЯ РОЗРАХУНКОВИХ РОБІТ

Укладачі: *Богданський Ю.В., доктор фіз.-мат. наук, проф.*
Бондаренко Віктор Григорович, доктор фіз.-мат. наук, проф.
Мальцев А.Ю., кандидат фіз.-мат. наук, доц.
Подколзін Гліб Борисович, кандидат фіз.-мат. наук, доц.

Відповідальний редактор *Каніовська І.Ю., кандидат фіз.-мат. наук, доц.*

Рецензент: *Дудкін М.Є. доктор фіз.-мат. наук, проф.*

Посібник містить задачі для розрахункових робіт по основних розділах дисципліни «математичний аналіз» – границя послідовності і функції, ряди, похідна та її застосування. Кожен розділ містить методичні вказівки із прикладами розв’язання. Для студентів математичних і технічних спеціальностей університетів

ЗМІСТ

ВСТУП	4
РОЗДІЛ 1 ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ ТА ЧИСЛОВІ РЯДИ	5
1.1 Теоретичні відомості та приклади розв’язування задач	5
1.2 Завдання розрахункової роботи	8
1.3 Теоретичні питання для самоконтролю	25
РОЗДІЛ 2 ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ	26
2.1 Теоретичні відомості та приклади розв’язування задач	26
2.2 Завдання розрахункової роботи	27
2.3 Теоретичні питання для самоконтролю	37
РОЗДІЛ 3 ПОХІДНА ФУНКЦІЇ ДІЙСНОЇ ЗМІННОЇ	38
3.1 Теоретичні відомості та приклади розв’язування задач	38
3.2 Завдання розрахункової роботи	41
3.3 Теоретичні питання для самоконтролю	59
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА.	59

ВСТУП

Дисципліни «Математичний аналіз» є базовою для таких дисциплін як: ЗО 4 «Фізика», ЗО 5 «Диференціальні рівняння», ЗО 6 «Теорія ймовірностей», ЗО 9 «Чисельні методи», ЗО 7 «Функціональний аналіз», ПВ 1 «Гармонічний аналіз та операційне числення», ПО 5 «Математична статистика», ПО 7 «Рівняння математичної фізики», ПО 10 «Теорія випадкових процесів», ЗО 13 «Теорія прийняття рішень», ПВ 2 «Теорія стійкості та варіаційне числення», ПО 13 «Стаціонарні випадкові процеси», ЗО 11 «Теорія керування», ЗО 12 «Основи системного аналізу», ЗО 10 «Методи оптимізації та дослідження операцій», ПО 16 «Системний аналіз стохастичних розподілених процесів», ПО 8 «Аналіз часових рядів», ПВ 3 «Основи фінансової математики».

Для засвоєння та закріплення знань та умінь програма передбачає виконання завдань розрахункових робіт за обсягами годин самостійної роботи студентів. Пропонований збірник містить такі завдання для студентів Інституту прикладного системного аналізу спеціальностей 122 «Комп'ютерні науки» та 124 «Системний аналіз». Зміст збірника охоплює теми, що вивчаються в першому семестрі: послідовності та числові ряди, границя та похідна функції дійсної змінної, застосування похідної. Збірник складається з трьох розділів: завданням розрахункових робіт передують теоретичні відомості та приклади розв'язування задач. Кожне завдання містить 31 варіант, що забезпечує індивідуальне виконання студентами розрахункової роботи. При складанні даного посібника автори використовували джерела, наведені в списку літератури—зокрема, Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике та Методичні вказівки до виконання розрахункових робіт з дисципліни «Математичний аналіз». НТУУ КПІ, 2015 р.

РОЗДІЛ 1 Границя послідовності та числові ряди

1.1 Теоретичні відомості та приклади розв'язування задач

Основні теоретичні питання, що необхідні для розв'язання завдань РР.

Поняття числової послідовності та її границі. Теорема про обмеженість збіжної послідовності. Арифметичні властивості границь послідовностей. Критерій Коші. Збіжність та сума числового ряду. Необхідна умова збіжності числового ряду. Ознака порівняння. Ознаки Даламбера та Коші. Теорема Лейбниця. Оцінка залишка знакочергового ряду. Теорема про збіжність абсолютно збіжного ряду.

Границя числової послідовності $\{x_n; n \geq 1\}$ визначається як число a , що задовольняє співвідношення: $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) |x_n - a| < \varepsilon$

Позначення: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Термінологія: якщо послідовність $\{x_n; n \geq 1\}$ має границю, вона зветься збіжною; в іншому випадку (відсутність границі)—послідовність розбіжна.

Достатня умова збіжності. Послідовність зростає і обмежена зверху, тобто

$x_n \leq x_{n+1}$ починаючи з деякого номера ($\forall n \geq N$) та $\exists M : \dots \forall n \geq 1 \ x_n \leq M$

$x_n \leq \text{const}$ (або x_n спадає, тобто $x_n \geq x_{n+1}$ та обмежена знизу:

$\exists M : \dots \forall n \geq 1 \ x_n \geq M$).

Необхідна та достатня умова збіжності. Послідовність задовольняє умові: для довільного $\forall \varepsilon > 0$ існує натуральне число $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ таке, що має місце співвідношення $\forall n, m \geq N(\varepsilon) |x_n - x_m| < \varepsilon$ (**критерій Коші**).

Арифметичні властивості границь послідовностей.

Задані збіжні послідовності $\{a_n, n \geq 1\}; \{b_n, n \geq 1\}; \{c_n, n \geq 1\}; \{d_n, n \geq 1\}$:

$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a; \exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$; та $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ - нескінченно мала; $\exists D \geq 0: \forall n \geq 1 |d_n| \leq D$ - обмежена.

Тоді виконуються умови:

$$1) \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = a + b;$$

$$2) \forall \alpha \in \mathbb{R} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha a_n = \alpha a;$$

$$3) \exists \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b;$$

$$4) \text{ за умови } b \neq 0 \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b};$$

$$5) \exists \lim_{n \rightarrow \infty} (c_n \cdot d_n) = 0.$$

Для обчислення границі послідовності використовуються елементарні перетворення або наведені нижче відомі «чудові» границі, що дозволяють розкривати невизначеності.

Нехай α_n — нескінченно мала послідовність, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$. Тоді

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \alpha_n}{\alpha_n} = 1; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}} = e; \quad 3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_b(1 + \alpha_n)}{\alpha_n} = \frac{1}{\ln b};$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^{\alpha_n} - 1}{\alpha_n} = \ln b; \quad 5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \alpha_n)^p - 1}{\alpha_n} = p.$$

Приклади розв'язання задач.

$$1. \text{ Довести, що } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ (вказати } N(\varepsilon)). \quad a_n = \frac{3-n}{2n+1}; \quad a = -\frac{1}{2}.$$

Розв'язання. $|a_n - a| = \left| \frac{3-n}{2n+1} - \left(-\frac{1}{2}\right) \right| = \left| \frac{7}{2n+1} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow 2n+1 > \frac{7}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{7}{2\varepsilon} - \frac{1}{2}.$

Тому $|a_n - a| < \varepsilon$ виконується для всіх $n \geq N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{7}{2\varepsilon} - \frac{1}{2} \right\rceil + 1$ (тут $[b]$ — ціла частина числа b — найбільше ціле число, що не перевищує b).

2. Обчислити границю числової послідовності $a_n = n(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1})$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{n^2 + 1 - n^2 + 1}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 1}} =$$

Розв'язання.

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n(\sqrt{1 + 1/n^2} + \sqrt{1 - 1/n^2})} = 1.$$

3. Обчислити границю числової послідовності $a_n = \left(\frac{n^2 - n}{n^2 + 2n - 1} \right)^{2n-1}$.

Розв'язання. $a_n = \exp \left((2n-1) \ln \left(\frac{n^2 - n}{n^2 + 2n - 1} \right) \right)$. Тому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \exp \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left((2n-1) \left(\frac{n^2 - n}{n^2 + 2n - 1} - 1 \right) \right) \right) = \exp \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)(-3n+1)}{n^2 + 2n - 1} \right) = e^{-6}.$$

4. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(e^{\frac{\sqrt{n}}{n+1}} - 1 \right)$ на збіжність.

Розв'язання. Оскільки при $n \rightarrow \infty$: $e^{\frac{\sqrt{n}}{n+1}} - 1 \sim \frac{\sqrt{n}}{n+1} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$, то вихідний ряд не є

абсолютно збіжним: за другою теоремою порівняння його можна порівняти з

рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, що є розбіжним. Послідовність $\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ є монотонно спадною:

$$\left(\frac{\sqrt{n}}{n+1} > \frac{\sqrt{n+1}}{n+1+1} \right) \Leftrightarrow (\sqrt{n}(n+2) > (n+1)\sqrt{n+1}) \Leftrightarrow (n(n+2)^2 > (n+1)^3) \Leftrightarrow (n^2 + n > 1).$$

$e^{\frac{\sqrt{n}}{n+1}} - 1$ також монотонно спадає; нескінченно мала і за ознакою Лейбніця ряд умовно збіжний.

Відповідь: ряд умовно збіжний.

1.2 Завдання розрахункової роботи

Завдання 1. Довести співвідношення $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ (знайти $N(\varepsilon)$).

1. $a_n = \frac{3n-2}{2n-1}, \quad a = \frac{3}{2}.$

2. $a_n = \frac{4n-1}{2n+1}, \quad a = 2.$

3. $a_n = \frac{7n+4}{2n+1}, \quad a = \frac{7}{2}.$

4. $a_n = \frac{2n-5}{3n+1}, \quad a = \frac{2}{3}.$

5. $a_n = \frac{7n-1}{n+1}, \quad a = 7.$

6. $a_n = \frac{4n^2+1}{3n^2+2}, \quad a = \frac{4}{3}.$

7. $a_n = \frac{9-n^3}{1+2n^3}, \quad a = -\frac{1}{2}.$

8. $a_n = \frac{4n-3}{2n+1}, \quad a = 2.$

9. $a_n = \frac{1-n^2}{2+4n^2}, \quad a = -\frac{1}{4}.$

10. $a_n = -\frac{5n}{n+1}, \quad a = -5.$

11. $a_n = \frac{n+1}{1-2n}, \quad a = -\frac{1}{2}.$

12. $a_n = \frac{2n+1}{3n-5}, \quad a = \frac{2}{3}.$

13. $a_n = \frac{1-n^2}{2+4n^2}, \quad a = -\frac{1}{4}.$

14. $a_n = \frac{3n^2}{2-n^2}, \quad a = -3.$

15. $a_n = \frac{n}{3n-1}, \quad a = \frac{1}{3}.$

16. $a_n = \frac{3n^3}{n^3-1}, \quad a = 3.$

17. $a_n = \frac{4+2n}{1-3n}, \quad a = -\frac{2}{3}.$

18. $a_n = \frac{5n+15}{6-n}, \quad a = -5.$

19. $a_n = \frac{3-n^2}{1+2n^2}, \quad a = -\frac{1}{2}.$

20. $a_n = \frac{2n-1}{2-3n}, \quad a = -\frac{2}{3}.$

21. $a_n = \frac{3n-1}{5n+1}, \quad a = \frac{3}{5}.$

22. $a_n = \frac{4n-3}{2n+1}, \quad a = 2.$

23. $a_n = \frac{1-2n^2}{2+4n^2}, \quad a = -\frac{1}{2}.$

24. $a_n = \frac{5n+1}{10n-3}, \quad a = \frac{1}{2}.$

25. $a_n = \frac{2-2n}{3+4n}, \quad a = -\frac{1}{2}.$

26. $a_n = \frac{23-4n}{2-n}, \quad a = 4.$

$$27. a_n = \frac{1+3n}{6-n}, \quad a = -3.$$

$$29. a_n = \frac{3n^2+2}{4n^2-1}, \quad a = \frac{3}{4}.$$

$$31. a_n = \frac{2n^3}{n^3-2}, \quad a = 2.$$

$$28. a_n = \frac{2n+3}{n+5}, \quad a = 2.$$

$$30. a_n = \frac{2-3n^2}{4+5n^2}, \quad a = -\frac{3}{5}.$$

Завдання 2. Обчислити границю послідовності

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt[3]{5n^2} + \sqrt[4]{9n^8+1}}{(n + \sqrt{n})\sqrt{7-n+n^2}}.$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{3n^3+3} + \sqrt[4]{n^5+1}}.$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt[3]{n^3+1} + \sqrt{n-1}}.$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2-1} + 7n^3}{\sqrt[4]{n^{12}+n+1} - n}.$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n-1} - \sqrt[3]{125n^3+n}}{\sqrt[5]{n} - n}.$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt[5]{n} - \sqrt[3]{27n^6+n^2}}{(n + \sqrt[4]{n})\sqrt{9+n^2}}.$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n^2+2}}{\sqrt[4]{4n^4+1} - \sqrt[3]{n^4-1}}.$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4+2} + \sqrt{n-2}}{\sqrt[4]{n^4+2} + \sqrt{n-2}}.$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^3 - \sqrt{n^5+1}}{\sqrt{4n^6+3} - n}.$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5n+2} - \sqrt[3]{8n^3+5}}{\sqrt[4]{n+7} - n}.$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt[4]{3n+1} + \sqrt{81n^4-n^2+1}}{(n + \sqrt[3]{n})\sqrt{5-n+n^2}}.$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n^2-3}}{\sqrt[3]{n^5-4} - \sqrt[4]{n^4+1}}.$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^5+3} - \sqrt{n-3}}{\sqrt[5]{n^5+3} + \sqrt{n-3}}.$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n} - 9n^2}{3n - \sqrt[4]{9n^8+1}}.$$

$$15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n+1} - \sqrt[3]{27n^3+4}}{\sqrt[4]{n} - \sqrt[3]{n^5+n}}.$$

$$16. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt[3]{7n} - \sqrt[4]{81n^8-1}}{(n+4\sqrt{n})\sqrt{n^2-5}}.$$

$$17. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3-7} + \sqrt[3]{n^2+4}}{\sqrt[4]{n^5+5} + \sqrt{n}}.$$

$$18. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^6+4} + \sqrt{n-4}}{\sqrt[5]{n^6+6} - \sqrt{n-6}}.$$

$$19. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - \sqrt[4]{n^3}}{\sqrt[3]{n^6+n^3+1} - 5n}.$$

$$20. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt[3]{8n^3+3}}{\sqrt[4]{n+4} - \sqrt[5]{n^5+5}}.$$

$$21. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt[4]{11n} + \sqrt{25n^4-81}}{(n-7\sqrt{n})\sqrt{n^2-n+1}}.$$

$$22. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} - \sqrt{n^2+5}}{\sqrt[5]{n^7} - \sqrt{n+1}}.$$

$$23. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^7+5} - \sqrt{n-5}}{\sqrt[7]{n^7+5} + \sqrt{n-5}}.$$

$$24. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+2} - 5n^2}{n - \sqrt{n^4-n+1}}.$$

$$25. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt[3]{n^3+2}}{\sqrt[7]{n+2} - \sqrt[5]{n^5+2}}.$$

$$26. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt{71n} - \sqrt[3]{64n^6+9}}{(n-\sqrt[3]{n})\sqrt{11+n^2}}.$$

$$27. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+6} - \sqrt{n^2-5}}{\sqrt[3]{n^3+3} + \sqrt[4]{n^3+1}}.$$

$$28. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^8+6} - \sqrt{n-6}}{\sqrt[8]{n^8+6} + \sqrt{n-6}}.$$

$$29. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - \sqrt{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^6+2} - n}.$$

$$30. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[5]{n^5+1}}.$$

$$31. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt[6]{n} + \sqrt[3]{n^{10}+1}}{(n+\sqrt[4]{n}) \sqrt[3]{n^3-1}}.$$

Завдання 3. Обчислити границю послідовності

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}).$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n(n-2)} - \sqrt{n^2-3}).$$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \sqrt[3]{n^3 - 5} \right) n \sqrt{n}.$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt{(n^2 + 1)(n^2 - 4)} - \sqrt{n^4 - 9} \right]$
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^5 - 8} - n \sqrt{n(n^2 + 5)}}{\sqrt{n}}.$
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 - 3n + 2} - n \right).$
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n + \sqrt[3]{4 - n^3} \right).$
8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt{n(n + 2)} - \sqrt{n^2 - 2n + 3} \right].$
9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt{(n + 2)(n + 1)} - \sqrt{(n - 1)(n + 3)} \right].$
10. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\sqrt{n(n^4 - 1)} - \sqrt{n^5 - 8} \right).$
11. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[3]{5 + 8n^3} - 2n \right).$
12. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\sqrt[3]{5 + n^3} - \sqrt[3]{3 + n^3} \right).$
13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt[3]{(n + 2)^2} - \sqrt[3]{(n - 3)^2} \right].$
14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n + 1)^3} - \sqrt{n(n - 1)(n - 3)}}{\sqrt{n}}.$
15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 3n - 2} - \sqrt{n^2 - 3} \right).$
16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(\sqrt{n + 2} - \sqrt{n - 3} \right).$
17. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n(n^5 + 9)} - \sqrt{(n^4 - 1)(n^2 + 5)}}{n}.$
18. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n(n + 5)} - n \right).$
19. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^3 + 8} \left(\sqrt{n^3 + 2} - \sqrt{n^3 - 1} \right).$
20. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^3 + 1)(n^2 + 3)} - \sqrt{n(n^4 + 2)}}{2\sqrt{n}}.$
21. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt{(n^2 + 1)(n^2 + 2)} - \sqrt{(n^2 + 1)(n^2 - 2)} \right].$
22. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^5 + 1)(n^2 - 1)} - n \sqrt{n(n^4 + 1)}}{n}.$

$$23. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^4 + 1)(n^2 - 1)} - \sqrt{n^6 - 1}}{n}.$$

$$24. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n - \sqrt{n(n-1)} \right].$$

$$25. \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(\sqrt[3]{n^2(n^6 + 4)} - \sqrt[3]{(n^8 - 1)} \right).$$

$$26. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n\sqrt{n} - \sqrt{n(n+1)(n+2)} \right].$$

$$27. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n} \left(\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{n(n-1)} \right).$$

$$28. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2} \left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n-4} \right).$$

$$29. \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{n^4 + 3} - \sqrt{n^4 - 2} \right).$$

$$30. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n(n+1)(n+2)} \left(\sqrt{n^3 - 3} - \sqrt{n^3 - 2} \right).$$

$$31. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^2 + 5)(n^4 + 2)} - \sqrt{n^6 - 3n^2 + 5}}{n}.$$

Завдання 4. Обчислити границю послідовності

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right).$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)! + (2n+2)!}{(2n+3)!}.$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1+3+5+7+\dots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2} \right].$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}.$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{\sqrt{9n^4+1}}.$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{1+2+3+\dots+n}.$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1+3+5+7+\dots+(2n-1)}{n+3} - n \right].$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+4+7+\dots+(3n-2)}{\sqrt{5n^4+n+1}}.$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)! - (n+2)!}{(n+3)!}.$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-1)! + (3n+1)!}{(3n)!(n-1)}.$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}}{1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n}}.$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-3+5-7+9-11+\dots+(4n-3)-(4n-1)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+n+1}}.$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2+3-4+\dots+(2n-1)-2n}{\sqrt{9n^4+1}}.$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 5^n}{2^{n+1} + 5^{n+1}}.$$

$$15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+5} - \sqrt{3n^4+2}}{1+3+5+\dots+(2n-1)}.$$

$$16. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2^n}{3^{n-1} + 2^n}.$$

$$17. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n+2}{1+2+3+\dots+n} - \frac{2}{3} \right].$$

$$18. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \dots + \frac{3^n + 2^n}{6^n} \right).$$

$$19. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-5+4-7+\dots+2n-(2n+3)}{n+3}.$$

$$20. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)! + (2n+2)!}{(2n+3)! - (2n+2)!}.$$

$$21. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n-n^2+3}.$$

$$22. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sqrt{n} - 1}{5+7+12+\dots+(5n-3)}.$$

$$23. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{16} + \frac{9}{64} + \dots + \frac{1+2^n}{4^n} \right).$$

$$24. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+4+6+\dots+2n}{1+3+5+\dots+(2n-1)}.$$

$$25. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1+5+9+13+\dots+(4n-3)}{n+1} - \frac{4n+1}{2} \right].$$

$$26. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2+3-4+\dots-2n}{\sqrt[3]{n^3+2n+2}}.$$

$$27. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 7^n}{2^n - 7^{n-1}}.$$

$$28. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+2)!}{(n-1)! + (n+2)!}.$$

$$29. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+6+9+\dots+3n}{n^2+4}.$$

$$30. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{10} + \frac{29}{100} + \dots + \frac{2^n + 5^n}{10^n} \right). \quad 31. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 + 4 + \dots + 2n}{n + 3} - n \right).$$

Завдання 5. Обчислити границю послідовності

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^n.$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^{n+1}.$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2} \right)^{n^4}.$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+3} \right)^{n+2}.$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+2}{2n^2+1} \right)^{n^2}.$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2-6n+7}{3n^2+20n-1} \right)^{-n+1}.$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-3n+6}{n^2+5n+1} \right)^{n/2}.$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-10}{n+1} \right)^{3n+1}.$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n-7}{6n+4} \right)^{3n+2}.$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2+4n-1}{3n^2+2n+7} \right)^{2n+5}.$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1} \right)^{-n^2}.$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+5n+7}{2n^2+5n+3} \right)^n.$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n^2}.$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^2+3n-1}{5n^2+3n+3} \right)^{n^2}.$$

$$15. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{3n-1} \right)^{2n+3}.$$

$$16. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+7n-1}{2n^2+3n-1} \right)^{-n^2}.$$

$$17. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+5} \right)^{n+4}.$$

$$18. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3+1}{n^3-1} \right)^{2n-n^3}.$$

$$19. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+21n-7}{2n^2+18n+9} \right)^{2n+1}.$$

$$20. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{10n-3}{10n-1} \right)^{5n}.$$

$$21. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2-5n}{3n^2-2n+7} \right)^{n+1}.$$

$$22. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+1} \right)^{-n^2}.$$

$$23. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-6n+5}{n^2-5n+5} \right)^{3n+2}.$$

$$24. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{n+2} \right)^n.$$

$$25. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n^2+18n-15}{7n^2+11n+15} \right)^{n+2}.$$

$$26. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1} \right)^{n+1}.$$

$$27. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3+n+1}{n^3+2} \right)^{2n^2}.$$

$$28. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{13n+3}{13n-10} \right)^{n-3}.$$

$$29. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+2n+3}{2n^2+2n+1} \right)^{3n^2-7}.$$

$$30. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+5}{n-7} \right)^{n/6+1}.$$

$$31. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^2+4n-1}{4n^2+2n+3} \right)^{1-2n}.$$

Завдання 6 Обчислити суму числового ряду.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2+12n-5}.$$

$$2. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{24}{9n^2-12n-5}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2+6n-8}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2+21n-8}.$$

$$5. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{4n^2 + 8n + 3}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2 + 3n - 2}.$$

$$9. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n - 2}.$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{36n^2 - 24n - 5}.$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2 + 4n - 3}.$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2 + 3n - 20}.$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{16n^2 - 8n - 15}.$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{25n^2 + 5n - 6}.$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 - 35n - 6}.$$

$$23. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{12}{36n^2 + 12n - 35}.$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2 - 3n - 2}.$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{16n^2 + 8n - 15}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 28n - 45}.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 - 7n - 12}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 14n - 48}.$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 84n - 13}.$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 + 35n - 6}.$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 42n - 40}.$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 - 21n - 10}.$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{4n^2 - 9}.$$

$$22. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n - 2}.$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{24}{49n^2 + 21n - 10}.$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{25n^2 - 5n - 6}.$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 56n - 33}.$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{36n^2 - 12n - 35}.$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 + 7n - 12}.$$

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 70n - 24}.$$

Завдання 7 Дослідити ряд на збіжність

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^{n-1} + n - 1}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2 + 5}{n^2 + 4}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{n}.$$

$$5. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt[3]{n-1}}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2 + 3)^2}{n^5 + \ln^4 n}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 2}{n^5 + \sin 2^n}.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + \cos n}{3^n + \sin n}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - \cos^2 6n}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n+1}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{4\sqrt{n}}.$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \ln n}.$$

$$13. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+5}} \sin \frac{1}{n-1}.$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n} + 2} \operatorname{arctg} \frac{n+3}{n^2 + 5}.$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}} (e^{1/\sqrt{n}} - 1).$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2 + 1}{n^2 + n + 2}.$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^3}.$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^3}{n^3 + 1}.$$

$$19. \sum_{n=3}^{\infty} n^3 \operatorname{tg}^5 \frac{\pi}{n}.$$

$$20. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{\left(\sqrt[3]{n}-1\right)\left(n\sqrt[4]{n^3}-1\right)}.$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right).$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5+2}}.$$

$$23. \sum_{n=2}^{\infty} \left(e^{\sqrt{n}/(n^3-1)} - 1\right).$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2\pi}{2n+1}}{\sqrt{n}}.$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+7n}{5^n+n}.$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} n \left(e^{1/n} - 1\right)^2.$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}.$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{(n-1)\sqrt[5]{n^2+1}}.$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n}{n^2 \sqrt[3]{n}+5}.$$

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{n}{(n^2+3)^{5/2}}.$$

Завдання 8 Дослідити ряд на збіжність

$$1. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{2^n(n-1)!}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}(n^3+1)}{(n+1)!}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n 2n!}{(2n)!}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+2)!}{3n+5} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n!} \sin \frac{2}{3^n}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg \frac{5}{n}}{n!}.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n)!} \operatorname{tg} \frac{1}{5^n}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n (n^2 - 1)}{n!}.$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+2)!}.$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}.$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n}}{(2n-1)!}.$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(3n)!}.$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{3^n (n+1)!}.$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n-1}}.$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3^n + 1)(2n)!}.$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{\pi}{2^n}.$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}.$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}.$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n!}.$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (n+1)!}{(2n)!}.$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)! 4^n}.$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-1)}.$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)}{7 \cdot 9 \cdot 11 \dots (2n+5)}.$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n!}{\sqrt{2^n + 3}}.$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{10^n n^2}.$$

$$28. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^{n-1} \sqrt{n^2 + 5}}{(n-1)!}.$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \sqrt[3]{n}}{3^n + 2}.$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}.$$

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)}{2^{n-1} n!}.$$

Завдання 9 Дослідити ряд на збіжність

$$1. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{-n^2}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2 + 1}{n^2 + 1} \right)^{n^2}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \left(\frac{2n}{3n+5} \right)^n.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2} \right)^{n^2}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{3n+1} \right)^n (n+1)^3.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-3}{5n+1} \right)^{n^3}.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{10n+5} \right)^{n^2}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} n \arcsin^n \frac{\pi}{4n}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n-1} \right)^{n^2}.$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^n \frac{n}{5^n}.$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{n+1} \right)^{n^2}.$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{4n-1} \right)^n (n-1)^2.$$

$$14. \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-3} \right)^{n^2}.$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1} \right)^{2n+1}.$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1} \right)^{n/2}.$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}.$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin^n \frac{\pi}{2n}.$$

$$19. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{(\ln n)^n}.$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{n^3}.$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \operatorname{arctg}^n \frac{\pi}{3n}.$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 3^n}{(2n+1)^n}.$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} e^{-n}.$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{3n-1}{4n+2} \right)^{2n}.$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{4n+3} \right)^{n^2}.$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+2}}{(2n^2+1)^{n/2}}.$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{2n}.$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2} \frac{1}{2^n}.$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^{n+2}}{5^n}.$$

$$30. \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt[3]{n} \left(\frac{n-2}{2n+1} \right)^{3n}.$$

$$31. \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \operatorname{arctg}^{2n} \frac{\pi}{4n}.$$

Завдання 10 Дослідити ряд на збіжність

$$1. \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n.$$

$$3. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}.$$

$$4. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln \ln n) \ln n}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n^2}{n^4 - n^2 + 1}.$$

$$6. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1) \ln n}.$$

$$7. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n+1)}.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \sqrt[4]{2n+3}}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin \frac{\pi}{2\sqrt{n}}}{\sqrt{3n+1}}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{\pi}{6n}.$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n!}.$$

$$12. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(2n)}.$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}.$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}.$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)2^{2n}}.$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\cos \frac{\pi}{3\sqrt{n}} \sqrt[3]{3n + \ln n}}.$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)(3/2)^n}.$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{3n}.$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+3)}{\ln(n+4)}.$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{n^3}}.$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{tg} \frac{\pi}{4\sqrt{n}}}{\sqrt{5n-1}}.$$

$$22. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)2^{2n+2}}.$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}.$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \cos\left(2/\sqrt{n+4}\right)}.$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{2^n}.$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \sin^2 n}.$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin 3^n}{3^n}.$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right).$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{n}.$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right). \quad 31. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{(n+1)!}.$$

Завдання 11 Довести співвідношення, використовуючи необхідну ознаку збіжності ряду

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0.$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n!!}{n^n} = 0.$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)^n}{(2n-1)!} = 0.$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{2n^2!} = 0.$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0.$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!}{5^{n^2}} = 0.$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n!} = 0.$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n^n} = 0.$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(2n+1)!} = 0.$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)!!}{n^n} = 0.$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n)^n}{(2n-1)!} = 0.$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n)!}{2^{n^2}} = 0.$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n!)^3} = 0.$$

$$15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5}{(2n)!} = 0.$$

$$16. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{3n}}{n!} = 0.$$

$$17. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!}{n^n} = 0.$$

$$18. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(2n-1)} = 0.$$

$$19. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)!!}{n^n} = 0.$$

$$20. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)^n}{(2n+1)!} = 0.$$

$$21. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n)!}{2^{n^2}} = 0.$$

$$22. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{[(n+1)!]^2} = 0.$$

$$23. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{4^{n^2}} = 0.$$

$$24. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{2^{n^2}} = 0.$$

$$25. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)!}{n^n} = 0.$$

$$26. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(2n+3)!} = 0.$$

$$27. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)!!}{n^n} = 0.$$

$$28. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5n)^n}{(2n+1)!} = 0.$$

$$29. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5n)!}{2^{n^2}} = 0.$$

$$30. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{[(n+2)!]^2} = 0.$$

$$31. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{(2n)!!} = 0.$$

1.3 Теоретичні питання для самоконтролю

1. Послідовності. Границя. Властивості збіжних послідовностей: обмеженість, єдиність границі.
2. Границя: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$
3. Нескінченно малі, нескінченно великі послідовності,
4. Арифметичні властивості нескінченно малих нескінченно великих.
5. Теорема. про характеристизацію збіжних послідовностей.
6. Арифметичні властивості збіжних послідовностей.
7. Границі в нерівностях. Теорема про три послідовності.
8. Монотонні послідовності, теорема Вейерштрасса для монотонної послідовності.
9. Перша та друга границя, число e .
10. Підпослідовності. Часткові границі.
11. Фундаментальна послідовність. Критерій Коші.
12. Числові ряди. Арифметичні властивості рядів. Необхідна ознака збіжності ряду.
13. Критерій Коші збіжності числових рядів.
14. Теорема. Ознака порівняння в нерівностях.
15. Теорема. Ознака порівняння гранична.
16. Узагальнений гармонійний ряд - ряд Діріхле.
17. Ознака Даламбера.
18. Ознака Коші радикальна.
19. Ряди з членами довільного знаку. Абсолютно і умовно збіжні ряди.
20. Ряди, знаки доданків яких чергуються. Ознака Лейбніца.
21. "Хвіст" ряду. Наслідок з ознаки Лейбніца про оцінку "хвоста".

Розділ 2 Границя функції

2.1 Теоретичні відомості та приклади розв'язування задач

Поняття границі функції в точці. Теорема про обмеженість функції, що має границю. Перехід до границь в нерівностях. Арифметичні властивості границь функцій. Нескінченно малі та нескінченно великі. Чудові границі. Неперервність функції в точці. Арифметичні властивості неперервних функцій. Теорема про заміну нескінченно малих функцій еквівалентними.

Границя функції. Задана функція $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 – гранична точка множини A .

Означення (за Коші) Число a називається границею функції f в точці x_0 якщо $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in D(f); |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$. Позначення:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Для границь функції в точці виконуються природні арифметичні властивості, за умови існування границі у кожної функції.

Для обчислення границі функції використовуються наступні чудові границі, що дозволяють розкривати невизначеності:

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= 1; & 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} &= \frac{1}{\ln a}; & 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \ln a \\ 4) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} &= e; & 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} &= a. \end{aligned}$$

Приклади розв'язання задач.

1. Обчислити границю функції $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin\left(\frac{x^2}{\pi}\right)}{2^{\sqrt{\sin x + 1}} - 2}$.

Розв'язання.
$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin\left(\frac{x^2}{\pi}\right)}{2^{\sqrt{\sin x + 1}} - 2} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\pi - \frac{x^2}{\pi}}{2 \ln 2 (\sqrt{\sin x + 1} - 1)} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\pi^2 - x^2}{\pi \ln 2 (\pi - x)} = \frac{2}{\ln 2}.$$

Тут використано: $\sin\left(\frac{x^2}{\pi}\right) = \sin\left(\pi - \frac{x^2}{\pi}\right) \square \pi - \frac{x^2}{\pi}, x \rightarrow \pi;$

$$2^{\sqrt{\sin x + 1}} - 2 = 2\left(2^{\sqrt{\sin x + 1} - 1} - 1\right) \square 2 \ln 2\left(\sqrt{\sin x + 1} - 1\right), x \rightarrow \pi;$$

$$\sqrt{\sin x + 1} - 1 \square \frac{1}{2} \sin x = \frac{1}{2} \sin(\pi - x) \square \frac{1}{2}(\pi - x), x \rightarrow \pi.$$

2. Обчислити границю функції $\lim_{x \rightarrow 2+0} \sqrt[3]{1 + \operatorname{arccotg}\left(\frac{1}{x-2}\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{x-2}\right)}.$

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 2+0} \operatorname{arccotg}\left(\frac{1}{x-2}\right) = \begin{array}{|c|} \hline \frac{1}{x-2} = y \\ \hline x \rightarrow 2+0 \Leftrightarrow \\ \hline \Leftrightarrow y \rightarrow +\infty \\ \hline \end{array} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \operatorname{arccotg} y = 0; \quad \text{функція}$

$z(x) = \cos\left(\frac{1}{x-2}\right)$ – обмежена; функція $f(y) = \sqrt[3]{y}$ – неперервна. Тому

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \sqrt[3]{1 + \operatorname{arccotg}\left(\frac{1}{x-2}\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{x-2}\right)} = \sqrt[3]{1} = 1.$$

2.2 Завдання розрахункової роботи

Завдання 1 Довести співвідношення $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, обчисливши $\delta(\varepsilon)$.

1. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3} = -7.$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 4x - 1}{x - 1} = 6.$

3. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 5x - 2}{x + 2} = -7.$

4. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 - 14x + 6}{x - 3} = 10.$

5. $\lim_{x \rightarrow -1/2} \frac{6x^2 + x - 1}{x + 1/2} = -5.$

6. $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{6x^2 - x - 1}{x - 1/2} = 5.$

$$7. \lim_{x \rightarrow -1/3} \frac{9x^2 - 1}{x + 1/3} = -6.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x - 2} = 7.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow -1/3} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x + 1/3} = -4.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{7x^2 + 8x + 1}{x + 1} = -6.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = 2.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x - 1/2} = 5.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{6x^2 - 5x + 1}{x - 1/3} = -1.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow -7/5} \frac{10x^2 + 9x - 7}{x + 7/5} = -19.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow -7/2} \frac{2x^2 + 13x + 21}{2x + 7} = -\frac{1}{2}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 5/2} \frac{2x^2 - 9x + 10}{2x - 5} = \frac{1}{2}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{6x^2 + x - 1}{x - 1/3} = 5.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow -1/2} \frac{6x^2 - 75x - 39}{x + 1/2} = -81.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 11} \frac{2x^2 - 21x - 11}{x - 11} = 23.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{5x^2 - 24x - 5}{x - 5} = 26.$$

$$21. \lim_{x \rightarrow -7} \frac{2x^2 + 15x + 7}{x + 7} = -13.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^2 + 6x - 8}{x + 4} = -10.$$

$$23. \lim_{x \rightarrow -1/3} \frac{6x^2 - x - 1}{3x + 1} = -\frac{5}{3}.$$

$$24. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 2x - 15}{x + 5} = -8.$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{3x^2 - 40x + 128}{x - 8} = 8.$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 10} \frac{5x^2 - 51x + 10}{x - 10} = 49.$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x - 1/2} = -3.$$

$$28. \lim_{x \rightarrow -6} \frac{3x^2 + 17x - 6}{x + 6} = -19.$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{3x^2 + 17x - 6}{x - 1/3} = 19.$$

$$30. \lim_{x \rightarrow -1/5} \frac{15x^2 - 2x - 1}{x + 1/5} = -8.$$

$$31. \lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{15x^2 - 2x - 1}{x - 1/3} = 8.$$

Завдання 2 Обчислити границю функції

$$1. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x+x^2} - (1+x)}{x}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x+x^2} - 2}{x+x^2}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{x + 2\sqrt[3]{x^4}}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{2x}}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x} - 2}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2x}}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{9x} - 3}{\sqrt{3+x} - \sqrt{2x}}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x+2}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{16x} - 4}{\sqrt{4+x} - \sqrt{2x}}.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x^2} - 4}.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{\sqrt[3]{x/4} - 1/2}{\sqrt{1/2+x} - \sqrt{2x}}.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{\sqrt[3]{x/9} - 1/3}{\sqrt{1/3+x} - \sqrt{2x}}.$$

$$21 \lim_{x \rightarrow 1/4} \frac{\sqrt[3]{x/16} - 1/4}{\sqrt{1/4 + x} - \sqrt{2x}}.$$

$$22 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}}.$$

$$23 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[5]{x}}.$$

$$24 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2} - 2}{\sqrt[3]{x^2} + x^3}.$$

$$25 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x+3x^2} - (1+x)}{\sqrt[3]{x}}.$$

$$26 \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}.$$

$$27 \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt[3]{(\sqrt{x} - 4)^2}}.$$

$$28 \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{\sqrt[3]{x^3 + 8}}.$$

$$29 \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt[3]{x^2} - 16}. \quad 30 \lim_{x \rightarrow -8} \frac{10 - x - 6\sqrt{1-x}}{2 + \sqrt[3]{x}}. \quad 31 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2} - 9}.$$

Завдання 3 Обчислити границю функції

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 4x}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 10x}{e^{x^2} - 1}.$$

$$3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 5x}{\sin 3x}.$$

$$4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\cos 7x - \cos 3x}.$$

$$5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\operatorname{tg}(\pi(2+x))}.$$

$$6 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\operatorname{tg}[2\pi(x+1/2)]}.$$

$$7 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{4x^2}.$$

$$8 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}.$$

$$9 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{\ln(1+2x)}.$$

$$10 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin(2\pi(x+10))}.$$

$$11 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-7x)}{\sin(\pi(x+7))}.$$

$$12 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x+5\pi/2)\operatorname{tg} x}{\arcsin 2x^2}.$$

$$13 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9 \ln(1-2x)}{4 \operatorname{arctg} 3x}.$$

$$14 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{3x+1}}{\cos[\pi(x+1)/2]}.$$

$$15 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x^2 + \pi x}.$$

$$16 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{3 \operatorname{arctg} x}.$$

$$17 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin[\pi(x+1)]}{\ln(1+2x)}.$$

$$18 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{1 - \cos x}.$$

$$19 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sin[\pi(x+2)]}.$$

$$20 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin[5(x+\pi)]}{e^{3x} - 1}.$$

$$21 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x \sin x}.$$

$$22 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{2^{-3x} - 1} \ln 2.$$

$$23 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\sin(\pi(x/2 + 1))}.$$

$$24 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^{3x} - 1)^2}.$$

$$25 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{x^4}.$$

$$26 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\ln(e-x) - 1}.$$

$$27 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x(1 - \cos 2x)}.$$

$$28 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 1)}{1 - \sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$29 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\pi(1+x/2))}{\ln(x+1)}.$$

$$30 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(e^{\pi x} - 1)}{3(\sqrt[3]{1+x} - 1)}.$$

$$31 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x}{1 - \cos x}.$$

Завдання 4 Обчислити границю функції

$$1. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{2^{\cos^2 x} - 1}{\ln \sin x}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{(2x-1)^2}{e^{\sin \pi x} - e^{-\sin 3\pi x}}.$$

$$3 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x - \sqrt[3]{2x-3})}{\sin(\pi x/2) - \sin[(x-1)\pi]}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^{-\sin 2x}}{\sin x - 1}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(\sqrt{2x^2 - 3x - 5} - \sqrt{1+x})}{\ln(x-1) - \ln(x+1) + \ln 2}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{\ln(4x-1)}{\sqrt{1 - \cos \pi x} - 1}.$$

$$11 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2^{\sin \pi x} - 1}{\ln(x^3 - 6x - 8)}.$$

$$13 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg} \ln(3x-5)}{e^{x+3} - e^{x^2+1}}.$$

$$15 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1 + \ln^2 x} - 1}{1 + \cos \pi x}.$$

$$17 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(2x-5)}{e^{\sin \pi x} - 1}.$$

$$19 \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\operatorname{tg} 2x}}{\ln(2x/\pi)}.$$

$$21 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2^x + 7} - \sqrt{2^{x+1} + 5}}{x^3 - 1}.$$

$$23 \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x^3 - \pi^3) \sin 5x}{e^{\sin^2 x} - 1}.$$

$$25 \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln \cos 2x}{\ln \cos 4x}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2}{\sin \ln(x-1)}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{\ln \sin 3x}{(6x - \pi)^2}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{(x - 2\pi)^2}{\operatorname{tg}(\cos x - 1)}.$$

$$10 \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arcsin(x+2)/2}{3^{\sqrt{2+x+x^2}} - 9}.$$

$$12 \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln \cos 2x}{(1 - \pi/x)^2}.$$

$$14 \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\ln \cos x}{3^{\sin 2x} - 1}.$$

$$16 \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos(x/2)}{e^{\sin x} - e^{\sin 4x}}.$$

$$18 \lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{e^{\sin^2 6x} - e^{\sin^2 3x}}{\log_3 \cos 6x}.$$

$$20 \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg}(e^{x+2} - e^{x^2-4})}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2}.$$

$$22 \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln(2 + \cos x)}{(3^{\sin x} - 1)^2}.$$

$$24 \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{e^{\sqrt[3]{x^3-4x^2+6}} - e}.$$

$$26 \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln \sin x}{(2x - \pi)^2}.$$

$$27 \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^{x^2-a^2} - 1}{\operatorname{tg} \ln(x/a)}.$$

$$28 \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sin(e^{\sqrt[3]{1-x^2}} - e^{\sqrt[3]{x+2}})}{\operatorname{arctg}(x+3)}.$$

$$29 \lim_{x \rightarrow a\pi} \frac{\ln(\cos(x/2) + 2)}{a^{a^2\pi^2/x^2 - a\pi/x} - a^{a\pi/x-1}}.$$

$$30 \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg}(3^{\pi/x} - 3)}{3^{\cos(3x/2)} - 1}.$$

$$31 \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{\sin(x^2/\pi)}{2^{\sqrt{\sin x+1}} - 2}.$$

Завдання 5 Обчислити границю функції

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^{2x} - 5^{3x}}{2x - \operatorname{arctg} 3x}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{-2x}}{2 \arcsin x - \sin x}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^{2x} - 7^{-2x}}{\sin 3x - 2x}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^{3x}}{\sin 2x - \sin x}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 5^{3x}}{\operatorname{arctg} x + x^3}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{3x}}{\operatorname{arctg} x - x^2}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{5x} - 2^x}{x - \sin 9x}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{-2x}}{2 \operatorname{arctg} x - \sin x}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12^x - 5^{-3x}}{2 \arcsin x - x}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - e^{-2x}}{\sin x - 2x}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{5x} - 2^{7x}}{\arcsin 2x - x}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^x}{\arcsin x + x^3}.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 2^{7x}}{\operatorname{tg} 3x - x}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{tg} 2x - \sin x}.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10^{2x} - 7^{-x}}{2 \operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} x}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{\sin 3x - \sin 5x}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^{3x} - 3^{2x}}{\operatorname{tg} x + x^3}.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{2x}}{2\operatorname{tg} x - \sin x}.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 7^x}{\arcsin 3x - 5x}.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-5x}}{2\sin x - \operatorname{tg} x}.$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^{5x} - 9^{-2x}}{\sin x - \operatorname{tg} x^3}.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{\sin 3x - \operatorname{tg} 2x}.$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{2x} - 2^{3x}}{\sin x + \sin x^2}.$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{3x}}{\sin 3x - \operatorname{tg} 2x}.$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9^x - 2^{3x}}{\operatorname{arctg} 2x - 7x}.$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-2x}}{x + \sin x^2}.$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{5x} - 2^{-7x}}{2x - \operatorname{tg} x}.$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{\sin 2x - \sin x}.$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x + \operatorname{tg} x^2}.$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 3^{2x}}{x + \arcsin x^3}.$$

$$31. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 3^{5x}}{\sin 7x - 2x}.$$

Завдання 6 Обчислити границю функції

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{\sin^2 x}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \sin x - \cos 2x}{\sin^2 x}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{\sin(x + 1)}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{\ln x - \ln a}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (e^x + e^{-x})}{e^{x^3} - e}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{1 - 2\cos x}{\sin(\pi - 3x)}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\sin \pi x}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\ln \operatorname{tg} x}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow b} \frac{a^x - a^b}{x - b}.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{x \sin 3x}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2\sin x}{x \ln \cos 5x}.$$

$$15. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) + \ln(x-h) - 2\ln x}{h^2}, \quad x > 0. \quad 16. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\log_2 x}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\operatorname{tg} x}.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^x - 2}{\ln x}.$$

$$19. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x-h)}{h}.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{\sin 3x}.$$

$$21. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} + a^{x-h} - 2a^x}{h^2}.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}}.$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{5+x} - 2}{\sin \pi x}.$$

$$24. \lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}.$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\lg x - 1}{\sqrt{x-9} - 1}.$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x+1} - 3}{\ln(1 + x\sqrt{1 + xe^x})}.$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{\sin^2 2x}.$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin bx - \sin ax}{\ln(\operatorname{tg}(\pi/4 + ax))}.$$

$$29. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin^3 x}{\cos^2 x}.$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\log_3 x - 1}{\operatorname{tg} \pi x}.$$

$$31. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\sin(x^2 - 1)}.$$

Завдання 7 Обчислити границю функції

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x-1}{x+1} \right)^{1/(\sqrt[3]{x}-1)}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{1/(x-a)}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x-1}{x} \right)^{1/(\sqrt[3]{x}-1)}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\cos x}{\cos 2} \right)^{1/(x-2)}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 8} \left(\frac{2x-7}{x+1} \right)^{1/(\sqrt[3]{x}-2)}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{1/\cos(3\pi/4-x)}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x-1}{x} \right)^{1/(\sqrt[5]{x}-1)}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow a} \left(2 - \frac{x}{a} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a}}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 2\pi} (\cos x)^{\operatorname{ctg} 2x/\sin 3x}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 2\pi} (\cos x)^{1/\sin^2 2x}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{6-x}{3} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{6}}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 4\pi} (\cos x)^{\operatorname{ctg} x/\sin 4x}.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 1} (3-2x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 4\pi} (\cos x)^{\frac{5}{\operatorname{tg} 5x \sin 2x}}.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{9-2x}{3} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{6}}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{6\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 3x}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 1} (2e^{x-1} - 1)^{x/(x-1)}.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^{1/(x-\pi/2)}.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 1} (2e^{x-1} - 1)^{(3x-1)/(x-1)}.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow \pi/2} (1 + \cos 3x)^{\sec x}.$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 2} (2e^{x-2} - 1)^{(3x+2)/(x-2)}.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sin(x-1)}{x-1} \right)^{\frac{\sin(x-1)}{x-1-\sin(x-1)}}.$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2-x}{x} \right)^{1/\ln(2-x)}.$$

$$24. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right)^{1/\cos x}.$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{\sin(\pi x/2)}{\ln(2-x)}}.$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sin x}{\sin 3} \right)^{1/(x-3)}.$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+1}{2x} \right)^{\frac{\ln(x+2)}{\ln(2-x)}}.$$

$$28. \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{\frac{18 \sin}{\operatorname{ctg} x}}.$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{\ln(x+1)}{\ln(2-x)}}.$$

$$30. \lim_{x \rightarrow \pi} \left(\operatorname{ctg} \frac{x}{4} \right)^{1/\cos(x/2)}.$$

$$31. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x-1}{x} \right)^{\frac{\ln(3+2x)}{\ln(2-x)}}.$$

2.3 Теоретичні питання для самоконтролю

1. Означення границь функції в точці за Коші та за Гейне, еквівалентність означень.
2. Критерій Коші про існування границі функції в точці.
3. Однобічні границі, критерій існування границі функції в точці. Границі монотонних функцій.
4. Еквівалентні функції, властивості. Нескінченно малі, таблиця еквівалентних.
5. Неперервні в точці функції, арифметичні властивості. Неперервність композиції функцій в точці. Неперервність елементарних функцій.
6. Однобічні границі, неперервність в точці. Точки розриву: класифікація.
7. Теорема про нульове значенні. Теорема Коші про проміжне значення.
8. Теорема про існування оберненої функції.
9. Неперервні функції на відрізку: теореми Вейєрштраса.

Розділ 3 Похідна функції дійсної змінної

3.1 Теоретичні відомості та приклади розв'язування задач

Основні теоретичні питання, що необхідні для розв'язання завдань РР. Похідна, її геометричний зміст. Диференціал та його зв'язок з похідною. Арифметичні властивості похідних. Диференціювання складеної функції; оберненої функції; параметрично заданої функції. Таблиця похідних елементарних функцій.. Похідні вищих порядків. Формула Лейбниця. Достатні умови монотонності функції на числовому проміжку. Точки екстремуму, необхідні та достатні умови. Найбільше та найменше значення функції, що неперервна на відрізку. Опуклість функції, точки перегину графіка функції. Дослідження функцій на екстремум за допомогою вищих похідних. Асимптоти графіка функції.

Визначення похідної f' функції f в точці x :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Якщо $u(x) = f(g(x))$ — композиція функцій f та g , то її похідна

$$u'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Похідна другого порядку визначається співвідношенням — $f''(x) = (f'(x))'$,

Похідна n -го порядку — рекурентною формулою $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$.

Похідну n -го порядку від добутку функцій можна обчислити за формулою Лейбниця:

$$(u(x)v(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k (u(x))^{(n-k)} (v(x))^{(k)} \quad \text{де } (u(x))^{(0)} = u(x).$$

Застосування похідних: дослідження функції на монотонність та пошук екстремумів, дослідження на опуклість.

Приклади розв'язання задач.

1. Користуючись означенням похідної, знайти $f'(0)$. $f(x) = \begin{cases} x^3 2^{|x|} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Розв'язання. $f'(0) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 2^{|x|} \cos \frac{1}{x} \right) = 0$, оскільки $x^2 \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$, а функція $2^{|x|} \cos \frac{1}{x}$ обмежена в проколеному околі точки $x = 0$.

2. Обчислити похідну $y = \frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} 2x)$.

Розв'язання. $y' = \frac{1}{1 + \operatorname{sh}^2(2x)} \cdot 2 \operatorname{ch} 2x = -\frac{2}{\operatorname{ch} 2x}$.

3. Обчислити похідну $y = (\operatorname{ctg} x)^{\ln(\operatorname{arcsin} x)}$.

Розв'язання.

$$y' = y \cdot (\ln y)' = (\operatorname{ctg} x)^{\ln(\operatorname{arcsin} x)} \left(\ln(\operatorname{arcsin} x) \cdot \ln(\operatorname{ctg} x) \right)' = (\operatorname{ctg} x)^{\ln(\operatorname{arcsin} x)} \cdot \left(\frac{\ln(\operatorname{ctg} x)}{\sqrt{1-x^2} \operatorname{arcsin} x} + \frac{\ln(\operatorname{arcsin} x)}{\operatorname{ctg} x (-\sin^2 x)} \right).$$

4. Обчислити $y''_{xx} : \begin{cases} x = \ln(\sin t) \\ y = \sqrt{1 + \sqrt{t}} \end{cases}$.

Розв'язання. Спочатку шукаємо $x'_t = \operatorname{ctg} t$ та

$y'_t = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{t})^{-1/2} \cdot \frac{1}{2} t^{-1/2} = \frac{1}{4} (t + t\sqrt{t})^{-1/2}$. Тому параметричне завдання y'_x має вид:

$\begin{cases} x = \ln(\sin t) \\ y = \frac{1}{4} (t + t\sqrt{t})^{-1/2} : \operatorname{ctg} t \end{cases}$. Далі за тим же сценарієм:

$$(y'_x)'_t = \left(\frac{\operatorname{tg} t}{4} \cdot (t + t\sqrt{t})^{-1/2} \right)' = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\cos^2 x} (t + t\sqrt{t})^{-1/2} - \frac{\operatorname{tg} t}{2} (t + t\sqrt{t})^{-3/2} \left(1 + \frac{3}{2} \sqrt{t} \right) \right).$$

$$\text{Відповідь: } \begin{cases} x = \ln(\sin t) \\ y = \frac{\operatorname{tg} t}{4} \left(\frac{1}{\cos^2 x} (t + t\sqrt{t})^{-1/2} - \frac{\operatorname{tg} t}{2} (t + t\sqrt{t})^{-3/2} \left(1 + \frac{3}{2} \sqrt{t} \right) \right) \end{cases}$$

5. Знайти похідну n -ого порядку $y = (4x^2 - 1)\ln(x + 1)$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку похідну n -ого порядку функції $z = \ln(x + 1)$:

$$z' = \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1}; \quad z'' = (-1)(x+1)^{-2}; \quad z''' = (-1)(-2)(x+1)^{-3}. \quad \text{Індуктивне}$$

припущення: $z^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!(x+1)^{-n}$ нескладно перевірити:

$z^{(n+1)} = (-1)^{(n+1)-1}(n-1)!n(x+1)^{-(n+1)}$. Застосуємо формулу Лейбниція:

$$y^{(n)}(x) = (4x^2 - 1)z^{(n)}(x) + C_n^1 \cdot 8x \cdot z^{(n-1)}(x) + C_n^2 \cdot 8 \cdot z^{(n-2)}(x) = (4x^2 - 1)(-1)^{n-1}(n-1)!(x+1)^{-n} + 8nx(-1)^{n-2}(n-2)!(x+1)^{-(n-1)} + 4n(n-1)(-1)^{n-3}(n-3)!(x+1)^{-(n-2)}.$$

6. Дослідити поведінку функції $y = \sin x + \operatorname{sh} x - 2x$ в околі точки $x_0 = 0$ за допомогою похідних вищих порядків.

Розв'язання. Шукаємо найменший порядок похідної функції $y(x)$, для якого

$$y^{(n)}(x_0) \neq 0: \quad y'(x) = \cos x + \operatorname{ch} x - 2; \quad y'(0) = 0; \quad y''(x) = -\sin x + \operatorname{sh} x; \quad y''(0) = 0; \\ y'''(x) = -\cos x + \operatorname{ch} x; \quad y'''(0) = 0; \quad y^{(IV)}(x) = \sin x + \operatorname{sh} x; \quad y^{(IV)}(0) = 0; \\ y^{(V)}(x) = \cos x + \operatorname{ch} x; \quad y^{(V)}(0) = 2.$$

Відповідь: точка $(0,0)$ є точкою перегину графіка функції $y(x)$. Екстремума в точці $x_0 = 0$ функція не має.

7. Провести повне дослідження функції $y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$ і побудувати її графік.

Розв'язання. 1) О.Д.З. $x \neq 1$. 2) $y(0) = 1$; $y(-1) = 0$; $y > 0$ при $x > -1$; $y < 0$ при $x < -1$. 3) $\lim_{x \rightarrow 1+0} y(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1-0} y(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = -\infty$. 4)

Вертикальна асимптота графіка функції: $x = 1$. Пошук похилих асимптот: а)

$$x \rightarrow +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (y(x) - x) = 5. \quad \text{б)} \quad x \rightarrow -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y(x)}{x} = 1;$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (y(x) - x) = 5$. Отже, пряма $y = x + 5$ є похилою асимптотою графіка при

$$x \rightarrow +\infty \text{ та } x \rightarrow -\infty. \quad 5) \quad y'(x) = \frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}, \quad x \neq 1. \quad \text{Тому } y' > 0 \Leftrightarrow x < 1 \text{ або } x > 5;$$

19. $y = 3(\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x}), \quad x_0 = 1.$
20. $y = 1/(3x + 2), \quad x_0 = 2.$
21. $y = x/(x^2 + 1), \quad x_0 = -2.$
22. $y = (x^2 - 3x + 3)/3, \quad x_0 = 3.$
23. $y = 2x/(x^2 + 1), \quad x_0 = 1.$
24. $y = -2(\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x}), \quad x_0 = 1.$
25. $y = \frac{1 + 3x^2}{3 + x^2}, \quad x_0 = 1.$
26. $y = 14\sqrt{x} - 15\sqrt[3]{x} + 2, \quad x_0 = 1.$
27. $y = 3\sqrt[4]{x} - \sqrt{x}, \quad x_0 = 1.$
28. $y = (3x - 2x^3)/3, \quad x_0 = 1.$
29. $y = x^2/10 + 3, \quad x_0 = 2.$
30. $y = (x^2 - 2x - 3)/4, \quad x_0 = 4.$
31. $y = 6\sqrt[3]{x} - 16\sqrt[4]{x}/3, \quad x_0 = 1.$

Завдання 2 Обчислити наближено з використанням диференціала

1. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 7,76.$
2. $y = \sqrt[3]{x^3 + 7x}, \quad x = 1,012.$
3. $y = (x + \sqrt{5 - x^2})/2, \quad x = 0,98.$
4. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 27,54.$
5. $y = \arcsin x, \quad x = 0,08.$
6. $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 5}, \quad x = 0,97.$
7. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 26,46.$
8. $y = \sqrt{x^2 + x + 3}, \quad x = 1,97.$
9. $y = x^{11}, \quad x = 1,021.$
10. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 1,21.$
11. $y = x^{21}, \quad x = 0,998.$
12. $y = \sqrt[3]{x^2}, \quad x = 1,03.$
13. $y = x^6, \quad x = 2,01.$
14. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 8,24.$
15. $y = x^7, \quad x = 1,996.$
16. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 7,64.$
17. $y = \sqrt{4x - 1}, \quad x = 2,56.$
18. $y = 1/\sqrt{2x^2 + x + 1}, \quad x = 1,016.$
19. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 8,36.$
20. $y = 1/\sqrt{x}, \quad x = 4,16.$

$$21. y = x^7, \quad x = 2,002.$$

$$23. y = \sqrt{x^3}, \quad x = 0,98.$$

$$25. y = \sqrt[5]{x^2}, \quad x = 1,03.$$

$$27. y = \sqrt{1+x+\sin x}, \quad x = 0,01.$$

$$29. y = \sqrt[4]{2x - \sin(\pi x/2)}, \quad x = 1,02.$$

$$31. y = 1/\sqrt{2x+1}, \quad x = 1,58.$$

$$22. y = \sqrt{4x-3}, \quad x = 1,78.$$

$$24. y = x^5, \quad x = 2,997.$$

$$26. y = x^4, \quad x = 3,998.$$

$$28. y = \sqrt[3]{3x + \cos x}, \quad x = 0,01.$$

$$30. y = \sqrt{x^2 + 5}, \quad x = 1,97.$$

Завдання 3 Обчислити похідну

$$1. y = \sqrt{x} \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+a}) - \sqrt{x+a}.$$

$$2. y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}).$$

$$3. y = 2\sqrt{x} - 4\ln(2 + \sqrt{x}).$$

$$4. y = \ln \frac{x^2}{\sqrt{1-ax^4}}.$$

$$5. y = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}).$$

$$6. y = \ln \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}.$$

$$7. y = \ln^2(x + \cos x).$$

$$8. y = \ln^3(1 + \cos x).$$

$$9. y = \ln \frac{x^2}{1-x^2}.$$

$$10. y = \operatorname{Intg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

$$11. y = \ln \sqrt[4]{\frac{1+2x}{1-2x}}.$$

$$12. y = x + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}} + a^{\pi\sqrt{2}}.$$

$$13. y = \ln \sin \frac{2x+4}{x+1}.$$

$$14. y = \log_{16} \log_5 \operatorname{tg} x.$$

$$15. y = \log_4 \log_2 \operatorname{tg} x.$$

$$16. y = x(\cos \ln x + \sin \ln x)/2.$$

$$17. y = \ln \cos \frac{2x+3}{x+1}.$$

$$18. y = \lg \ln(\operatorname{ctg} x).$$

$$19. y = \log_a \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}.$$

$$20. y = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(\sqrt{2} \operatorname{tg} x + \sqrt{1+2 \operatorname{tg}^2 x} \right).$$

$$21. y = \ln \arcsin \sqrt{1-e^{2x}}.$$

$$22. y = \ln \arccos \sqrt{1-e^{4x}}.$$

$$23. y = \ln \left(bx + \sqrt{a^2 + b^2 x^2} \right).$$

$$24. y = \ln \frac{\sqrt{x^2+1} + x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1} - x\sqrt{2}}.$$

$$25. y = \ln \left(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}} \right).$$

$$26. y = \ln \left(e^x + \sqrt{1+e^{2x}} \right).$$

$$27. y = \ln \frac{\sqrt{5} + \operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{5} - \operatorname{tg}(x/2)}.$$

$$28. y = \ln \frac{\ln x}{\sin(1/x)}.$$

$$29. y = \ln \ln \sin(1+1/x).$$

$$30. y = \ln \ln^3 \ln^2 x.$$

$$31. y = \ln \ln^2 \ln^3 x.$$

Завдання 4 Обчислити похідну

$$1. y = (\operatorname{arctg} x)^{(1/2) \ln(\operatorname{arctg} x)}.$$

$$2. y = (\sin \sqrt{x})^{\ln(\sin \sqrt{x})}.$$

$$3. y = (\sin x)^{5e^x}.$$

$$4. y = (\arcsin x)^{e^x}.$$

$$5. y = (\ln x)^{3^x}.$$

$$6. y = x^{\arcsin x}.$$

$$7. y = (\operatorname{ctg} 3x)^{2e^x}.$$

$$8. y = x^{e^{\operatorname{tg} x}}.$$

$$9. y = (\operatorname{tg} x)^{4e^x}.$$

$$10. y = (\cos 5x)^{e^x}.$$

$$11. y = (x \sin x)^{8 \ln(x \sin x)}.$$

$$12. y = (x-5)^{\operatorname{ch} x}.$$

$$13. y = (x^3 + 4)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$14. y = x^{\sin x^3}.$$

$$15. y = (x^2 - 1)^{\operatorname{sh} x}.$$

$$16. y = (x^4 + 5)^{\operatorname{ctg} x}.$$

$$17. y = (\sin x)^{5x/2}.$$

$$18. y = (x^2 + 1)^{\cos x}.$$

$$19. y = 19^{x^{19}} x^{19}.$$

$$20. y = x^{3^x} \cdot 2^x.$$

$$21. y = (\sin \sqrt{x})^{e^{1/x}}.$$

$$22. y = x^{e^{\operatorname{ctg} x}}.$$

$$23. y = x^{e^{\cos x}}.$$

$$24. y = x^{2^x} \cdot 5^x.$$

$$25. y = x^{e^{\sin x}}.$$

$$26. y = (\operatorname{tg} x)^{\ln(\operatorname{tg} x)/4}.$$

$$27. y = x^{e^{\operatorname{arctg} x}}.$$

$$28. y = (x^8 + 1)^{\operatorname{th} x}.$$

$$29. y = x^{29^x} \cdot 29^x.$$

$$30. y = (\cos 2x)^{\ln(\cos 2x)/4}.$$

$$31. y = x^{e^x} x^9.$$

Завдання 5 Обчислити похідну

$$1. y = \frac{1}{\sin \alpha} \ln(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} \alpha). \quad 2. y = x \cos \alpha + \sin \alpha \ln \sin(x - \alpha).$$

$$3. y = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\sin \ln x - (\sqrt{2} - 1) \cdot \cos \ln x \right] x^{\sqrt{2}+1}. \quad 4. y = \operatorname{arctg} \left(\frac{\cos x}{\sqrt[4]{\cos 2x}} \right).$$

$$5. y = 3 \frac{\sin x}{\cos^2 x} + 2 \frac{\sin x}{\cos^4 x}. \quad 6. y = (a^2 + b^2)^{-1/2} \arcsin \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2} \sin x}{b} \right).$$

$$7. y = \frac{7^x (3 \sin 3x + \cos 3x \cdot \ln 7)}{9 + \ln^2 7}. \quad 8. y = \ln \frac{\sin x}{\cos x + \sqrt{\cos 2x}}.$$

$$9. y = \frac{1}{a(1+a^2)} \left[\operatorname{arctg}(a \cos x) + a \operatorname{Intg} \frac{x}{2} \right].$$

$$10. y = \frac{\operatorname{ctg} x + x}{1 - x \operatorname{ctg} x}.$$

$$11. y = -\frac{1}{3 \sin^3 x} - \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}.$$

$$12. y = (1 + x^2) e^{\operatorname{arctg} x}.$$

$$13. y = \frac{1}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \operatorname{arctg} \frac{2x \sin \frac{\alpha}{2}}{1 - x^2}.$$

$$14. y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\sqrt{x^4 + 1} - x^2}}{x}, \quad x > 0.$$

$$15. y = \frac{6^x (\sin 4x \cdot \ln 6 - 4 \cos 4x)}{16 + \ln^2 6}.$$

$$16. y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2 \operatorname{tg} x}}{1 - \operatorname{tg} x}.$$

$$17. y = \operatorname{arctg} \frac{2 \sin x}{\sqrt{9 \cos^2 x - 4}}.$$

$$18. y = \frac{5^x (2 \sin 2x + \cos 2x \cdot \ln 5)}{4 + \ln^2 5}.$$

$$19. y = \ln \frac{\sqrt{2} + \operatorname{th} x}{\sqrt{2} - \operatorname{th} x}.$$

$$20. y = \frac{3^x (4 \sin 4x + \ln 3 \cdot \cos 4x)}{16 + \ln^2 3}.$$

$$21. y = \frac{4^x (\ln 4 \cdot \sin 4x - 4 \cos 4x)}{16 + \ln^2 4}.$$

$$22. y = \frac{\cos x}{\sin^2 x} - 2 \cos x - 3 \operatorname{Intg} \frac{x}{2}.$$

$$23. y = \frac{5^x (\sin 3x \cdot \ln 5 - 3 \cos 3x)}{9 + \ln^2 5}.$$

$$24. y = x - \ln(1 + e^x) - 2e^{\frac{x}{2}} \operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}.$$

$$25. y = \frac{2^x (\sin x + \cos x \cdot \ln 2)}{1 + \ln^2 2}.$$

$$26. y = \frac{\ln(\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \alpha)}{\sin \alpha}.$$

$$27. y = 2 \frac{\cos x}{\sin^4 x} + 3 \frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

$$28. y = \frac{\cos x}{3(2 + \sin x)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg}(x/2) + 1}{\sqrt{3}}.$$

$$29. y = \frac{3^x (\ln 3 \cdot \sin 2x - 2 \cos 2x)}{\ln^2 3 + 4}.$$

$$30. y = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} - \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{3 \cos^3 x}.$$

$$31. y = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} x + \sqrt{2 \operatorname{tg} x + 1}}{\operatorname{tg} x - \sqrt{2 \operatorname{tg} x + 1}}}.$$

Завдання 6 Скласти рівняння дотичної та нормалі до заданої параметрично кривої в точці, що відповідає значенню параметра $t = t_0$.

$$1. \begin{cases} x = a \sin^3 t, \\ y = a \cos^3 t, \quad t_0 = \pi/3. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x = \sqrt{3} \cos t, \\ y = \sin t, \quad t_0 = \pi/3. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \quad t_0 = \pi/3. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3, \quad t_0 = 1. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x = \frac{2t + t^2}{1 + t^3}, \\ y = \frac{2t - t^2}{1 + t^3}, \quad t_0 = 1. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}, \\ y = \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}, \quad t_0 = -1. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x = t(t \cos t - 2 \sin t), \\ y = t(t \sin t + 2 \cos t), \quad t_0 = \pi/4. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x = \frac{3at}{1 + t^2}, \\ y = \frac{3at^2}{1 + t^2}, \quad t_0 = 2. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x = 2 \ln(\operatorname{ctg} t) + \operatorname{ctg} t, \\ y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t, \quad t_0 = \pi/4. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x = \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{4} t^4, \\ y = \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{3} t^3, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x = at \cos t, \\ y = at \sin t, \quad t_0 = \pi/2. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos t, \quad t_0 = \pi/6. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad t_0 = 1. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x = \frac{1 + \ln t}{t^2}, \\ y = \frac{3 + 2 \ln t}{t}, \quad t_0 = 1. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x = \frac{1+t}{t^2}, \\ y = \frac{3}{2t^2} + \frac{2}{t}, \quad t_0 = 2. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x = a \sin^3 t, \\ y = a \cos^3 t, \quad t_0 = \pi/6. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x = a(t \sin t + \cos t), \\ y = a(\sin t - t \cos t), \quad t_0 = \pi/4. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} x = \frac{t+1}{t}, \\ y = \frac{t-1}{t}, \quad t_0 = -1. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3, \quad t_0 = 2. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} x = \ln(1 + t^2), \\ y = t - \operatorname{arctg} t, \quad t_0 = 1. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} x = t(1 - \sin t), \\ y = t \cos t, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} x = \frac{1+t^3}{t^2-1}, \\ y = \frac{t}{t^2-1}, \quad t_0 = 2. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \quad t_0 = \pi/4. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} x = t - t^4, \\ y = t^2 - t^3, \quad t_0 = 1. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2 + t + 1, \quad t_0 = 1. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = \sin t, \quad t_0 = -\pi/3. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} x = 2 \operatorname{tg} t, \\ y = 2 \sin^2 t + \sin 2t, \quad t_0 = \pi/4. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2, \quad t_0 = -2. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} x = \sin t, \\ y = a^t, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos 2t, \quad t_0 = \pi/6. \end{cases}$$

$$31. \begin{cases} x = 2e^t, \\ y = e^{-t}, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

Завдання 7 Обчислити похідну вказаного порядку.

$$1. y = (2x^2 - 7)\ln(x-1), \quad y^V = ? \quad 2. y = (3 - x^2)\ln^2 x, \quad y^{III} = ?$$

$$3. y = x \cos x^2, \quad y^{III} = ?$$

$$4. y = \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}}, \quad y^{III} = ?$$

$$5. y = \frac{\log_2 x}{x^3}, \quad y^{III} = ?$$

$$6. y = (4x^3 + 5)e^{2x+1}, \quad y^V = ?$$

$$7. y = x^2 \sin(5x-3), \quad y^{III} = ?$$

$$8. y = \frac{\ln x}{x^2}, \quad y^{IV} = ?$$

$$9. y = (2x+3)\ln^2 x, \quad y^{III} = ?$$

$$10. y = (1+x^2)\operatorname{arctg} x, \quad y^{III} = ?$$

$$11. y = \frac{\ln x}{x^3}, \quad y^{IV} = ?$$

$$12. y = (4x+3) \cdot 2^{-x}, \quad y^V = ?$$

$$13. y = e^{1-2x} \cdot \sin(2+3x), \quad y^{IV} = ?$$

$$14. y = \frac{\ln(3+x)}{3+x}, \quad y^{III} = ?$$

$$15. y = (2x^3 + 1)\cos x, \quad y^V = ?$$

$$16. y = (x^2 + 3)\ln(x-3), \quad y^{IV} = ?$$

$$17. y = (1-x-x^2)e^{(x-1)/2}, \quad y^{IV} = ?$$

$$18. y = \frac{1}{x} \sin 2x, \quad y^{III} = ?$$

$$19. y = (x+7)\ln(x+4), \quad y^V = ?$$

$$20. y = (3x-7) \cdot 3^{-x}, \quad y^{IV} = ?$$

$$21. y = \frac{\ln(2x+5)}{2x+5}, \quad y^{III} = ?$$

$$22. y = e^{x/2} \cdot \sin 2x, \quad y^{IV} = ?$$

$$23. y = \frac{\ln x}{x^5}, \quad y''' = ?$$

$$24. y = x \ln(1-3x), \quad y^{IV} = ?$$

$$25. y = (x^2 + 3x + 1)e^{3x+2}, \quad y^V = ?$$

$$26. y = (5x-8) \cdot 2^{-x}, \quad y^{IV} = ?$$

$$27. y = \frac{\ln(x-2)}{x-2}, \quad y^V = ?$$

$$28. y = e^{-x} \cdot (\cos 2x - 3 \sin 2x), \quad y^{IV} = ?$$

$$29. y = (5x-1) \ln^2 x, \quad y''' = ?$$

$$30. y = \frac{\log_3 x}{x^2}, \quad y^{IV} = ?$$

$$31. y = (x^3 + 3)e^{4x+3}, \quad y^{IV} = ?$$

Завдання 8 Обчислити похідну другого порядку y''_{xx} функції, що задана параметрично.

$$1. \begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = 2 \sec^2 t. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = 1/t. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x = \operatorname{sh}^2 t, \\ y = 1/\operatorname{ch}^2 t. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 - \cos t. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x = 1/t, \\ y = 1/(1+t^2). \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = 1/\sqrt{1-t}. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x = \sin t, \\ y = \sec t. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = 1/\sin 2t. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = t/\sqrt{1-t}. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[3]{t-1}. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x = \cos t/(1+2 \cos t), \\ y = \sin t/(1+2 \cos t). \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x = \sqrt{t^3 - 1}, \\ y = \ln t. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x = \operatorname{sh} t, \\ y = \operatorname{th}^2 t. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = 1/\sqrt{t}. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = \operatorname{tg}^2 t. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x = \sqrt{t-3}, \\ y = \ln(t-2). \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} x = \sin t, \\ y = \ln \cos t. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 + \cos t. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 2 - \cos t. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \ln \sin t. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} x = \cos t + t \sin t, \\ y = \sin t - t \cos t. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} x = e^t, \\ y = \arcsin t. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin^4(t/2). \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} x = \operatorname{ch} t, \\ y = \sqrt[3]{\operatorname{sh}^2 t}. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = t^2/2. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 4(2 + \cos t). \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} x = \sin t - t \cos t, \\ y = \cos t + t \sin t. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} x = 1/t^2, \\ y = 1/(t^2 + 1). \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} x = \cos t + \sin t, \\ y = \sin 2t. \end{cases}$$

$$31. \begin{cases} x = \ln t, \\ y = \operatorname{arctg} t. \end{cases}$$

Завдання 9 Перевірити, що функція у задовольняє рівняння .

$$1. \quad y = xe^{-x^2/2}, \\ xy' = (1 - x^2)y. \quad (1)$$

$$2. \quad y = \frac{\sin x}{x}, \\ xy' + y = \cos x. \quad (1)$$

$$3. \quad y = 5e^{-2x} + e^x/3, \\ y' + 2y = e^x. \quad (1)$$

$$4. \quad y = 2 + c\sqrt{1 - x^2}, \\ (1 - x^2)y' + xy = 2x. \quad (1)$$

$$5. \quad y = x\sqrt{1 - x^2}, \\ yy' = x - 2x^3. \quad (1)$$

$$6. \quad y = \frac{c}{\cos x}, \\ y' - \operatorname{tg} x \cdot y = 0. \quad (1)$$

$$7. \quad y = -\frac{1}{3x + c}, \\ y' = 3y^2. \quad (1)$$

$$8. \quad y = \ln(c + e^x), \\ y' = e^{x-y}. \quad (1)$$

$$9. \quad y = \sqrt{x^2 - cx}, \\ (x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0. \quad (1)$$

$$10. \quad y = x(c - \ln x), \\ (x - y)dx + xdy = 0. \quad (1)$$

$$11. \quad y = e^{\operatorname{tg}(x/2)}, \\ y' \sin x = y \ln y. \quad (1)$$

$$12. \quad y = \frac{1 + x}{1 - x}, \\ y' = \frac{1 + y^2}{1 + x^2}. \quad (1)$$

$$13. \quad y = \frac{b + x}{1 + bx}, \\ y - xy' = b(1 + x^2y'). \quad (1)$$

$$14. \quad y = \sqrt[3]{2 + 3x - 3x^2}, \\ yy' = \frac{1 - 2x}{y}. \quad (1)$$

$$15. \quad y = \sqrt{\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^2 + 1},$$

$$(1+e^x)yy' = e^x. \quad (1)$$

$$16. \quad y = \operatorname{tg} \ln 3x,$$

$$(1+y^2)dx = xdy. \quad (1)$$

$$17. \quad y = -\sqrt{\frac{2}{x^2} - 1},$$

$$1+y^2 + xyy' = 0. \quad (1)$$

$$18. \quad y = \sqrt[3]{x - \ln x - 1},$$

$$\ln x + y^3 - 3xy^2y' = 0. \quad (1)$$

$$19. \quad y = a + \frac{7x}{ax+1},$$

$$y - xy' = a(1+x^2y'). \quad (1)$$

$$20. \quad y = a \operatorname{tg} \sqrt{\frac{a}{x} - 1},$$

$$a^2 + y^2 + 2x\sqrt{ax - x^2}y' = 0. \quad (1)$$

$$21. \quad y = \sqrt[4]{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}},$$

$$8xy' - y = \frac{-1}{y^3\sqrt{x+1}}. \quad (1)$$

$$22. \quad y = (x+1)e^{x^2},$$

$$y' - 2xy = 2xe^{x^2}. \quad (1)$$

$$23. \quad y = \frac{2x}{x^3+1} + \frac{1}{x},$$

$$x(x^3+1)y' + (2x^3-1)y = \frac{x^3-2}{x}. \quad (1)$$

$$24. \quad y = e^{x+x^2} + 2e^x,$$

$$y' - y = 2xe^{x+x^2}. \quad (1)$$

$$25. \quad y = -x \cos x + 3x,$$

$$xy' = y + x^2 \sin x. \quad (1)$$

$$y = 1/\sqrt{\sin x + x},$$

$$26. \quad 2 \sin x \cdot y' + y \cos x =$$

$$= y^3(x \cos x - \sin x). \quad (1)$$

$$27. \quad y = \frac{x}{x-1} + x^2,$$

$$x(x-1)y' + y = x^2(2x-1). \quad (1)$$

$$28. \quad y = \frac{x}{\cos x},$$

$$y' - y \operatorname{tg} x = \sec x. \quad (1)$$

$$y = (x+1)^n (e^x - 1),$$

$$29. \quad y' - \frac{ny}{x+1} = e^x (1+x)^n. \quad (1)$$

$$20.31. \quad y = -\sqrt{x^4 - x^2},$$

$$xyy' - y^2 = x^4. \quad (1)$$

$$y = 2 \frac{\sin x}{x} + \cos x,$$

$$30. \quad x \sin x \cdot y' + (\sin x - x \cos x) y =$$

$$= \sin x \cdot \cos x - x. \quad (1)$$

Завдання 10. Побудувати графіки функцій із застосуванням першої похідної.

$$1. \quad y = 1 - \sqrt[3]{x^2 - 2x}. \quad 2. \quad y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}. \quad 3. \quad y = 12\sqrt[3]{6(x-2)^2} / (x^2 + 8).$$

$$4. \quad y = -12\sqrt[3]{6(x-1)^2} / (x^2 + 2x + 9). \quad 5. \quad y = 1 - \sqrt[3]{x^2 + 2x}.$$

$$6. \quad y = 2x + 6 - 3\sqrt[3]{(x+3)^2}. \quad 7. \quad y = 6\sqrt[3]{6(x-3)^2} / (x^2 - 2x + 9).$$

$$8. \quad y = 1 - \sqrt[3]{x^2 + 4x + 3}. \quad 9. \quad y = 3\sqrt[3]{(x-3)^2} - 2x + 6.$$

$$10. \quad y = 6\sqrt[3]{6x^2} / (x^2 + 4x + 12). \quad 11. \quad y = 4x + 8 - 6\sqrt[3]{(x+2)^2}.$$

$$12. \quad y = 3\sqrt[3]{6(x-4)^2} / (x^2 - 4x + 12). \quad 13. \quad y = \sqrt[3]{x(x+2)}.$$

$$14. \quad y = \sqrt[3]{x^2 + 4x + 3}. \quad 15. \quad y = -3\sqrt[3]{6(x+1)^2} / (x^2 + 6x + 17).$$

$$16. \quad y = 6\sqrt[3]{(x-2)^2} - 4x + 8. \quad 17. \quad y = 3\sqrt[3]{6(x-5)^2} / (x^2 - 6x + 17).$$

$$18. \quad y = 2 + \sqrt[3]{8x(x+2)}. \quad 19. \quad y = 6x - 6 - 9\sqrt[3]{(x-1)^2}.$$

$$20. \quad y = \sqrt[3]{x^2 + 6x + 8}. \quad 21. \quad y = \sqrt[3]{4x(x-1)}.$$

$$22. \quad y = -3\sqrt[3]{6(x+2)^2} / (x^2 + 8x + 24). \quad 23. \quad y = \sqrt[3]{x(x-2)}.$$

$$24. y = 1 - \sqrt[3]{x^2 - 4x + 3}.$$

$$25. y = 9\sqrt[3]{(x+1)^2} - 6x - 6.$$

$$26. y = 6\sqrt[3]{6(x+3)^2} / (x^2 + 10x + 33).$$

$$27. y = 8x - 16 - 12\sqrt[3]{(x-2)^2}.$$

$$28. y = -6\sqrt[3]{6(x-6)^2} / (x^2 - 8x + 24).$$

$$29. y = 12\sqrt[3]{(x+2)^2} - 8x - 16.$$

$$30. y = 3\sqrt[3]{6(x-1)^2} / (2(x^2 + 2x + 9)).$$

$$31. y = 3\sqrt[3]{(x+4)^2} - 2x - 8.$$

Завдання 11 Дослідити поведінку функції в околі заданої точки x_0 за допомогою похідних вищих порядків.

$$1. y = x^2 - 4x - (x-2)\ln(x-1), \quad x_0 = 2.$$

$$2. y = 4x - x^2 - 2\cos(x-2), \quad x_0 = 2.$$

$$3. y = 6e^{x-2} - x^3 + 3x^2 - 6x, \quad x_0 = 2.$$

$$4. y = 2\ln(x+1) - 2x + x^2 + 1, \quad x_0 = 0.$$

$$5. y = 2x - x^2 - 2\cos(x-1), \quad x_0 = 1.$$

$$6. y = \cos^2(x+1) + x^2 + 2x, \quad x_0 = -1.$$

$$7. y = 2\ln x + x^2 - 4x + 3, \quad x_0 = 1.$$

$$8. y = 1 - 2x - x^2 - 2\cos(x+1), \quad x_0 = -1.$$

$$9. y = x^2 + 6x + 8 - 2e^{x+2}, \quad x_0 = -2.$$

$$10. y = 4x + x^2 - 2e^{x+1}, \quad x_0 = -1.$$

$$11. y = (x+1)\sin(x+1) - 2x - x^2, \quad x_0 = -1.$$

$$12. y = 6e^{x-1} - 3x - x^3, \quad x_0 = 1.$$

$$13. y = 2x + x^2 - (x+1)\ln(2+x), \quad x_0 = -1.$$

$$14. y = \sin^2(x+1) - 2x - x^2, \quad x_0 = -1.$$

15. $y = x^2 + 4x + \cos^2(x + 2), \quad x_0 = -2.$
16. $y = x^2 + 2\ln(x + 2), \quad x_0 = -1.$
17. $y = 4x - x^2 + (x - 2)\sin(x - 2), \quad x_0 = 2.$
18. $y = 6e^x - x^3 - 3x^2 - 6x - 5, \quad x_0 = 0.$
19. $y = x^2 - 2x - 2e^{x-2}, \quad x_0 = 2.$
20. $y = \sin^2(x + 2) - x^2 - 4x - 4, \quad x_0 = -2.$
21. $y = \cos^2(x - 1) + x^2 - 2x, \quad x_0 = 1.$
22. $y = x^2 - 2x - (x - 1)\ln x, \quad x_0 = 1.$
23. $y = (x - 1)\sin(x - 1) + 2x - x^2, \quad x_0 = 1.$
24. $y = x^2 - 4x + \cos^2(x - 2), \quad x_0 = 2.$
25. $y = x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 24(x + 1 - e^x), \quad x_0 = 0.$
26. $y = \sin^2(x - 2) - x^2 + 4x - 4, \quad x_0 = 2.$
27. $y = 6e^{x+1} - x^3 - 6x^2 - 15x - 16, \quad x_0 = -1.$
28. $y = \sin x + \operatorname{sh} x - 2x, \quad x_0 = 0.$
29. $y = \sin^2(x - 1) - x^2 + 2x, \quad x_0 = 1.$
30. $y = \cos x + \operatorname{ch} x, \quad x_0 = 0.$
31. $y = x^2 - 2e^{x-1}, \quad x_0 = 1.$

Завдання 12 Знайти асимптоти та побудувати графік функції.

1. $y = (17 - x^2)/(4x - 5).$
2. $y = (x^2 + 1)/\sqrt{4x^2 - 3}.$

3. $y = (x^3 - 4x) / (3x^2 - 4).$
4. $y = (4x^2 + 9) / (4x + 8).$
5. $y = (4x^3 + 3x^2 - 8x - 2) / (2 - 3x^2).$
6. $y = (x^2 - 3) / \sqrt{3x^2 - 2}.$
7. $y = (2x^2 - 6) / (x - 2).$
8. $y = (2x^3 + 2x^2 - 3x - 1) / (2 - 4x^2).$
9. $y = (x^3 - 5x) / (5 - 3x^2).$
10. $y = (2x^2 - 6x + 4) / (3x - 2).$
11. $y = (2 - x^2) / \sqrt{9x^2 - 4}.$
12. $y = (4x^3 - 3x) / (4x^2 - 1).$
13. $y = (3x^2 - 7) / (2x + 1).$
14. $y = (x^2 + 16) / \sqrt{9x^2 - 8}.$
15. $y = (x^3 + 3x^2 - 2x - 2) / (2 - 3x^2).$
16. $y = (21 - x^2) / (7x + 9).$
17. $y = (2x^2 - 1) / \sqrt{x^2 - 2}.$
18. $y = (2x^3 - 3x^2 - 2x + 1) / (1 - 3x^2).$
19. $y = (x^2 - 11) / (4x - 3).$
20. $y = (2x^2 - 9) / \sqrt{x^2 - 1}.$
21. $y = (x^3 - 2x^2 - 3x + 2) / (1 - x^2).$
22. $y = (x^2 + 2x - 1) / (2x + 1).$
23. $y = (x^3 + x^2 - 3x - 1) / (2x^2 - 2).$
24. $y = (x^2 + 6x + 9) / (x + 4).$
25. $y = (3x^2 - 10) / \sqrt{4x^2 - 1}.$
26. $y = (x^2 - 2x + 2) / (x + 3).$
27. $y = (2x^3 + 2x^2 - 9x - 3) / (2x^2 - 3).$
28. $y = (3x^2 - 10) / (3 - 2x).$
29. $y = (-x^2 - 4x + 13) / (4x + 3).$
30. $y = (-8 - x^2) / \sqrt{x^2 - 4}.$
31. $y = (9 - 10x^2) / \sqrt{4x^2 - 1}.$

Завдання 13 Провести повне дослідження функції та побудувати графік.

1. $y = (2x + 3)e^{-2(x+1)}.$
2. $y = \frac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)}.$
3. $y = 3 \ln \frac{x}{x-3} - 1.$
4. $y = (3 - x)e^{x-2}.$

$$5. y = \frac{e^{2-x}}{2-x}.$$

$$7. y = (x-2)e^{3-x}.$$

$$9. y = 3 - 3\ln \frac{x}{x+4}.$$

$$11. y = \frac{e^{2(x+2)}}{2(x+2)}.$$

$$13. y = (2x+5)e^{-2(x+2)}.$$

$$15. y = 2\ln \frac{x}{x+1} - 1.$$

$$17. y = -\frac{e^{-2(x+2)}}{2(x+2)}.$$

$$19. y = (2x-1)e^{2(1-x)}.$$

$$21. y = 2\ln \frac{x}{x-4} - 3.$$

$$23. y = \frac{e^{x+3}}{x+3}.$$

$$25. y = -(2x+3)e^{2(x+2)}.$$

$$27. y = \ln \frac{x-5}{x} + 2.$$

$$29. y = \frac{e^{x-3}}{x-3}.$$

$$31. y = 2\ln \frac{x-1}{x} + 1.$$

$$6. y = \ln \frac{x}{x+2} + 1.$$

$$8. y = \frac{e^{2(x-1)}}{2(x-1)}.$$

$$10. y = -(2x+1)e^{2(x+1)}.$$

$$12. y = \ln \frac{x}{x-2} - 2.$$

$$4. y = \frac{e^{3-x}}{3-x}.$$

$$16. y = (4-x)e^{x-3}.$$

$$18. y = 2\ln \frac{x+3}{x} - 3.$$

$$20. y = -\frac{e^{-(x+2)}}{x+2}.$$

$$22. y = -(x+1)e^{x+2}.$$

$$24. y = \ln \frac{x}{x+5} - 1.$$

$$26. y = -\frac{e^{-2(x-1)}}{2(x-1)}.$$

$$28. y = (x+4)e^{-(x+3)}.$$

$$30. y = \ln \frac{x+6}{x} - 1.$$

3.3 Теоретичні питання для самоконтролю

1. Диференційованість функції в точці. неперервність диференційованої функції. Диференціал. Однобічні похідні.
2. Похідна функції в точці. Рівняння дотичної та нормалі до графіка функції.
3. Арифметичні правила обчислення похідної, похідна складеної функції
4. Диференційованість та похідна оберненої функції.
5. Інваріантність форми першого диференціала. похідна функцій заданих параметрично, друга похідна функцій заданих параметрично.
6. Таблиця похідних.
7. Похідні вищих порядків, теорема Лейбніца.
8. Теорема Ферма.
9. Теорема Ролля.
10. Теорема Коші.
11. Теорема Лагранжа. Наслідки.
12. Умови монотонності.
13. Екстремуми функції. Необхідна умова локального екстремуму.
14. Екстремуми функції. Достатні умови локального екстремуму.

Рекомендована література.

1. Зорич В.А. Математический анализ. Т.1. — М.: Наука, 1981.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Физматгиз, 1963. Т. 1. 608 с.
3. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз. К: Либідь, 1993. Ч.1. 213 с.
4. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1966. 544 с.
5. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука, 1971. 416 с.
6. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты. М: Высшая школа, 1994. 240 с.
7. Методичні вказівки до виконання розрахункових робіт з дисципліни «Математичний аналіз». НТУУ КПІ, 2015 р. 15 с.